Учреждение Российской академии наук
«Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН»

На правах рукописи

ТЫЧКОВ Сергей Николаевич

Аналитические исследования формальной интегрируемости систем дифференциальных уравнений

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы
и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2011

Работа выполнена в учреждении Российской академии наук «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН».

Научный руководитель:	д. ф.-м. н., профессор, Лычагин Валентин Васильевич
Официальные оппоненты:	д. ф.-м. н., Юмагужин Валерий Афтахович
	д. ф.-м. н., профессор, Гердт Владимир Петрович
Ведущая организация:	Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Защита состоится 19 января 2012 года в 14 часов 30 минут в ауд. 337 НИИММ им. Н. Г. Чеботарева на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. проф. Нужина, д. 1/37.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Казанского (Приволжского) федерального университета (г. Казань, ул. Кремлевская, 18).

Автореферат разослан «____» ____________ 2011 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.081.10,
канд. физ.-мат. наук, доцент Липачёв Е. К.

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Система дифференциальных уравнений в частных производных порядка k имеет вид:

$$\mathcal{E} : \{F_j\left(x, f, \frac{\partial^{|\sigma|} f}{\partial x^\sigma}\right) = 0, \quad j = 1, \ldots, r, \tag{1}$$

где $f(x) = (f^1(x), \ldots, f^m(x))$ — вектор-функция, зависящая от вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ — всевозможные мультииндексы, для которых выполняется условие $|\sigma| = \sigma_1 + \ldots + \sigma_n \leqslant k$.

Система (1) формально разрешима в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если в этой точке существует степенной ряд (необязательно сходящийся), удовлетворяющий системе.

Переопределенные системы дифференциальных уравнений возникают при решении многих задач математической физики, механики сплошных сред, теории управления, а также при вычислении дифференциальных инвариантов псевдогрупп Ли, вычислении симметрий дифференциальных уравнений и задач дифференциальной геометрии.

Задача нахождения условий формальной интегрируемости переопределенной системы дифференциальных уравнений является важным этапом исследования этой системы. Существует несколько методов нахождения таких условий. Кратко опишем некоторые из них.

Критерий Спенсера-Гольдшмидта [14] формальной интегрируемости системы дифференциальных уравнений, сформулированный в виде теоремы:

Теорема. *Пусть $\mathcal{E}$ — система дифференциальных уравнений, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. *2-ациклична, т. е. δ-когомологии Спенсера $H^{2,r} = 0$ для всех $r \geqslant 0$ и для любой точки $a \in \mathcal{E}$,*

2. *семейство векторных пространств $\mathcal{E} \ni a \mapsto g(a)$ образует векторное расслоение над многообразием $\mathcal{E}$, где $g(a)$ — символ системы $\mathcal{E}$ в точке $a \in \mathcal{E}$.*

3. *отображение $\pi_{k+1,k} : \mathcal{E}^{(1)} \to \mathcal{E}$ является гладким расслоением.*

Тогда система $\mathcal{E}$ формально интегрируема.

Нахождение условий формальной интегрируемости с помощью критерия Спенсера-Гольдшмидта сводится к проверке тривиальности δ-когомологий Спенсера, которые дают алгебраические препятствиями к формальной интегрируемости.

В общем случае в работе [9] предложен способ вычисления препятствий к формальной интегрируемости (называемые тензорами Вейля), которые являются элементами группы δ-когомологий Спенсера.

Другой подход, основанный на применении дифференциальных базисов Грёбнера, предложен в работе Э. Мансфилд [10]. К недостаткам этого метода можно отнести большую затратность вычисления дифференциального базиса Грёбнера и тот факт, что сам базис в некоторых случаях просто не существует. В статье [8] разобраны вопросы эффективности этого метода в сравнении с другими.

Другое определение дифференциального базиса Грёбнера, неэквивалентное данному Э. Мансфилд, предложил К. Ферро [5].

Э. Картан в работе [1] предложил метод нахождения условий совместности системы дифференциальных уравнений, основанный на анализе их инволютивности.

Условие инволютивности требует, чтобы δ-когомологии Спенсера $H^{i,j} = 0$ для всех $i, j \geqslant 0$.

Алгебраические методы для исследования разрешимости дифференциальных уравнений предложил К. Рикье [11]. М. Жане [7], Дж. Ритт [12], Дж. Томас [15] и Ж. Поммаре [2] усовершенствовали методы Рикье. В книге В. Зайлера [13] приведен подробный обзор этих методов.

В работах В. Гердта и Ю. Блинкова [6] предложены алгоритмы построения инволютивных базисов, используемых для приведении систем к инволюции.

Б. Кругликов и В. Лычагин в работах [9] предложили метод нахождения условий формальной интегрируемости для переопределенных систем дифференциальных уравнений с помощью обобщения *скобки Майера:* скобки Кругликова-Лычагина-Майера (далее КЛМ-скобка) и мультискобки Кругликова-Лычагина (далее КЛ-мультискобка). Именно этод метод используется в данной диссертационной работе.

Цель диссертационной работы

В настоящей диссертационной работе рассматривается задача нахождения условий формальной интегрируемости различных классов переопределенных систем дифференциальных уравнений и построение реализации скобок Кругликова-Лычагина в системе компьютерной алгебры Maple.

Полученные результаты мы применяем к исследованию формальной интегрируемости систем уравнений, возникающих в экономике, термодинамике, квантовой физике и теории тканей.

Научная новизна

Все результаты работы, выносимые на защиту, являются новыми. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Приведены необходимые и достаточные условия, при которых вектор-

ное поле на плоскости имеет гармонический интеграл с максимальной размерностью пространства решений. Описаны все векторные поля на плоскости с гармоническим интегралом.

2. Найдены условия формальной интегрируемости и максимальная размерность пространства решений уравнения ассоциативности, возникающего в квантовой теории поля. В случае, когда пространство решений имеет максимальную размерность, уравнение полностью проинтегрировано.

3. Исследованы условия совместности системы дифференциальных уравнений из экономики и термодинамики, предложенной П. Самуэлсоном и Дж. Купером.

4. Найдена размерность пространства решений для системы уравнений Абеля. Приведены условия формальной интегрируемости и максимальной размерности системы уравнений Абеля. Решена проблема, поставленная Черном для случая плоских 5-тканей.

5. Реализация на языке Maple вычисления КЛМ-скобки и КЛ-мультискобки

Практическая значимость

Результаты, изложенные в диссертации, нашли свое применение в исследованиях, проводимых лабораторией проблем качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений ИПУ РАН (лаборатория № 6). В частности, при решении задачи оптимального управления разработкой нефтяных и газовых месторождений и задачи управления системами с распреленными параметрами, что подтверждено актом о внедрении.

Кроме того, полученные результаты могут быть использованы для нахождения условий формальной интегрируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных с помощью аппарата КЛМ-скобки и КЛ-мультскобки в системе компьютерной алгебры Maple.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. научный семинар кафедры дифференциальных уравнений Казанского (Приволжского) федерального университета под руководством профессора Ю. В. Обносова (25 мая 2011 г., Казань),

2. научный семинар лаборатории проблем качественного исследования нелинейных дифференциальных уравнений ИПУ РАН под руководством профессоров А. Г. Кушнера и В. В. Лычагина,

3. международный семинар по компьютерной алгебре в Лаборатории информационных технологий Объединенного института ядерных исследований (ЛИТ ОИЯИ) под руководством профессора В. П. Гердта (25 мая 2010 г., Дубна),

4. международный семинар по компьютерной алгебре в ЛИТ ОИЯИ под руководством профессора В. П. Гердта (3 июня 2011 г., Дубна),

5. международная конференция «Геометрия в Одессе — 2009» (25—30 мая 2009 г., Одесса, Украина),

6. международная конференция «Геометрия в Астрахани 2009» (10—15 сентября 2009 г., Астрахань),

7. международная конференция «Геометрия в Кисловодске — 2010» (13—20 сентября 2010 г., Кисловодск),

8. вторая российская школа-конференция «Математика, информатика их приложения и роль в образовании» (8—12 декабря 2010 года, Тверь),

9. международная молодежная школа-конференция «Геометрия. Управление. Экономика» (15—21 августа 2011 г., Астрахань).

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах, 5 тезисов докладов.

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась диссертантом. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация изложена на 109 страницах, состоит из введения, четырех глав, двух приложений и списка литературы, содержащего 42 наименования. Также диссертация содержит два рисунка.

Нумерация параграфов производится двумя символами, а нумерация пунктов и подпунктов — тремя и четырьмя соответственно. Например, номером 3.2 обозначен второй параграф третьей главы, а номером 3.2.1 — первый пункт второго параграфа третьей главы.

Нумерация теорем в тексте диссертации сквозная, а нумерация формул в каждой главе своя.

Содержание работы

Во введении дана общая характеристика работы, сформулированы основные результаты и приведен краткий исторический обзор результатов по аналитическим методам отыскания условий формальной интегрируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В первой главе «Сведения из геометрии дифференциальных уравнений» приведены основные понятия геометрии дифференциальных уравнений, используемые в диссертационной работе.

В параграфе 1.1 описан основной аппарат геометрии дифференциальных уравнений — пространства джетов.

Введем пространство $J^k(n,m)$, точки которого определяются координатами $(x_1,\ldots,x_n,u^i_\sigma)$, где $i=1,\ldots,m$, а мультииндекс σ пробегает все значения, для которых $|\sigma|\leqslant k$.

Класс функций k-эквивалентных функции f в точке x_0 называется *k-джетом* функции f и обозначается $[f]^k_{x_0}$.

Пространство всех k-джетов $[f]^k_{x_0}$ функции f в точке x_0 обозначим $J^k_{x_0}(n,m)$.

В параграфе 1.2 описаны понятия *продолжения системы*, *регулярности и формальной интегрируемости* системы дифференциальных уравнений с геометрической точки зрения.

В параграфе 1.3 приведено определение распределения Картана и с его помощью сформулировано определение понятия решения дифференциального уравнения с геометрической точки зрения.

В параграфе 1.4 приведены определения символа дифференциального оператора и характеристического многообразия системы дифференциальных уравнений.

Во второй главе мы приводим определения КЛМ-скобки и КЛ-мультискобки — основного аппарата, которые мы применяем для исследования формальной интегрируемости систем дифференциальных уравнений в частных производных, и теоремы, позволяющие установить условия формальной интегрируемости.

В третьей главе мы приводим примеры использования скобок для нахождения условий формальной интегрируемости переопределенных систем дифференциальных уравнений.

В параграфе 3.1 нами рассмотрена задача отыскания условий совместности системы уравнений, возникающей при применении методов термодинамики к экономике, предложенных П. Самуэлсоном.

Система имеет вид:

$$\begin{cases} u_x v_y - u_y v_x - 1 = 0, \\ u v_x - h u_x = 0, \\ u v_y - m u_y = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нами найдены условия, когда система (2) имеет пространство решений максимальной размерности и формально интегрируема.

В параграфе 3.2 рассматривается вопрос об условиях существования интеграла у уравнения ассоциативности [4]. Что приводит нас к проблеме формальной интегрируемости следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} F_1 = u_{yyy} + u_{xxx} u_{xyy} - u_{xxy}^2 = 0, \\ F_2 = u_{xx} u_{yy} - c u_{xy}^2 = 0, \end{cases}$$

где c — вещественный параметр.

Показав при помощи КЛМ-скобки, что эта система формально интегрируема при $c = \frac{3}{2}$, мы получаем параметрически заданное решение исходной системы:

$$\begin{cases} x = C_3 - \frac{1}{8} t^2 C_1 - \frac{1}{2} t^2 s^3, \\ y = \frac{1}{4} t^3 s^4 + \frac{1}{4} t^3 C_1 s + C_2, \\ u = \frac{1}{32} s^8 t^5 + \frac{C_1}{40} s^5 t^5 + \frac{C_1^2}{2} s^2 t^5 + \frac{C_4}{4} s^4 t^3 + C_1 C_4 s t^3 - \frac{C_5}{2} t^2 (s^3 + C_1) + C_6. \end{cases}$$

В параграфе 3.3 нами рассмотрена задача описания векторных полей на плоскости без особых точек, первые интегралы которых являются гармоническими функциями. Данная задача сводится к исследованию совместности следующей системы дифференциальных уравнения в частных производных:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ X(u) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ — оператор Лапласа, а векторное поле X:

$$X = a(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Установлены следующие теоремы.

Теорема. *Система (3) формально интегрируема и имеет пространство решений максимальной размерности равной трем тогда и только тогда, когда векторное поле X пропорционально полю вида:*

$$(r-y)\frac{\partial}{\partial x}+(x-s)\frac{\partial}{\partial y},$$

где r, s — вещественные константы.

Теорема. *Векторное поле*

$$X=\frac{\partial}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

обладает не равным константе гармоническим первым интегралом тогда и только тогда, когда функция $b(x,y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(b^2+1)\Delta b-2b(b_x^2+b_y^2)=0.$$

В параграфе 3.4 приведены некоторые сведения из теории плоских d-тканей, дано определение ранга ткани и сформулирована проблема Черна [3]. Далее рассмотрен метод Абеля нахождения ранга плоской ткани и приведены примеры его использования. Также описан способ вывода уравнений Абеля для 3-, 4- и 5-тканей. С помощью мультискобки найдены условия формальной интегрируемости уравнений Абеля и максимальности ранга 5-тканей, тем самым дано решение проблемы Черна. Найденые условия использованы для проверки максимальности ранга трех 5-тканей.

В четвертой главе диссертации приводится описание реализации процедур для вычисления КЛМ-скобки и КЛ-мультискобки. на языке программирования Maple. Подобные компьютерные средства действительно необходимы из-за громоздкости вычислений скобок. Во многих случаях, представляющих практический интерес, вычисления невозможны без помощи компьютера.

В приложении А приведен листинг модуля Brackets, позволяющего вычислять КЛМ-скобки и КЛ-мультискобку в системе компьютерной алгебры Maple.

В приложении Б приведены тексты программ на языке Maple, выводящих уравнения Абеля и условия максимальности ранга для 3-, 4- и 5-тканей.

Список литературы

1. Картан, Э. Внешние дифференциальные формы и их геометрические приложения. / Э. Картан // Москва: Издательство МГУ. - 1962.

2. Поммаре, Ж. Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли. / Ж. Поммаре // Москва: Мир. - 1983. - С. 400.

3. Chern, S.-S. Web geometry / S.-S. Chern // Bull. Amer. Math. Soc. - 1982. - Vol.6. - P. 1–8.

4. Dijgraaf, R. Notes on topological string theory and 2D quantum gravity / R. Dijgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde // String theory and quantum gravity. - 1991. - P. 91–156.

5. Ferro, C. A survey on differential Gröbner bases / C. Ferro // Gröbner Bases in Symbolic Analysis, Radon Series on Computation and Applied Mathematics. - 2007. - Vol.2. - P. 43–73.

6. Gerdt, V. On an algorithmic optimization in computation of involutive bases / V. Gerdt // Prog Comp Softw. - 2002. - Vol.28. - P. 62–65.

7. Janet, M. Sur les systèmes d'équations aux derivées partielles / M. Janet // J Math Pure Appl. - 1920. - Vol.3. - P. 65–151.

8. Kruglikov, B. Note on two compatibility criteria: Jacobi-Mayer bracket vs. differential Gröbner basis / B. Kruglikov // Lobachevskii Journal of Mathematics. - 2006. - Vol.23. - P.57–70.

9. Kruglikov, B. Mayer brackets and solvability of PDEs - II / B. Kruglikov, V. Lychagin // Transactions of American Mathematical Society. - 2005. - Vol. 358. - P.1077–1103.

10. Mansfield, E. L. A simple criterion for involutivity / E.L. Mansfield // J. London Math. Soc. - 1996. - Vol. 54. - P. 323–345.

11. Riquier, C. H. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles. / C. H. Riquier // Paris: Gauthier-Villars. - 1910.

12. Ritt, J. F. Differential algebra. / J. F. Ritt // New York: Dover. - 1966.

13. Seiler, W. M. Involution: The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra. / W. M. Seiler // Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. - 2010. - P. 672.

14. Spencer, D. C. Overdetermined systems of linear partial differential equations / D. C. Spencer // Bull. Amer. Math. Soc. - 1965. - Vol. 75. - P. 1–114.

15. Thomas, J. M. Riquier's theory / J. M. Thomas // Annals of Math. - 1934. - Vol. 35.

Работы автора, опубликованные по теме диссертации

1. Тычков, С.Н.: О формальной интегрируемости системы дифференциальных уравнений термодинамики [Текст] / С.Н. Тычков // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. - 26. - С. 246-251 (2011)

2. Тычков, С.Н.: Реализация мультискобки Кругликова-Лычагина в системе компьютерной алгебры Maple [Текст] / С.Н. Тычков // Управление Большими Системами. - 33, С. 127-142 (2011)

3. Тычков, С. Н.: Реализация скобки Кругликова-Лычагина-Майера в системе компьютерной алгебры Maple [Текст] / С.Н. Тычков // Программные системы: теория и приложения. - 2. (2011)

4. Тычков, С. Н.: Вычисление скобки Кругликова-Лычагина-Майера в системе Maple [Текст] / С.Н. Тычков // Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе 2009». - С. 76. (2009)

5. Тычков, С. Н.: Реализация скобки Кругликова-Лычагина-Майера в системах символьной математики [Текст] / С.Н. Тычков // Тезисы докладов международной конференция «Геометрия в Астрахани 2009». - С. 31. (2009)

6. Тычков, С. Н.: О совместности одной системы дифференциальных уравнений из термодинамики [Текст] / С.Н. Тычков // Тезисы докладов международной молодежной школы «Геометрическая теория управления». - С. 56. (2010)

7. Тычков, С. Н.: Исследование совместности системы дифференциальных уравнений из термодинамики в системе компьютерной алгебры Maple [Текст] / С.Н. Тычков // Математика, информатика, их приложения и роль в образовании: Материалы второй Российской школы-конференции с международным участием для молодых ученых: статьи, обзоры, тезисы докладов. - С. 291. (2010)

8. Тычков, С. Н.: Формальная интегрируемость уравнений Абеля и 5-ткани максимального ранга [Текст] / С.Н. Тычков // Тезисы докладов международной школы-конференции для молодежи «Геометрия. Управление. Экономика.» - С. 34.